OM

SIMPLE CYKLISKE KURVER

AF

C. JUEL

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturvidensk. og matem. Afd. VIII. 6

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1911

Ved en simpel plan Kurve skal her forstaas en Kurve, der er sammensat af et endeligt Antal simple Buer. En simpel Bue er en overalt konveks Bue, der i hvert Punkt har en bestemt med Punktet kontinuert varierende Tangent og tillige en bestemt kontinuert varierende Krumningsradius; denne skal i ethvert indre Punkt af Buen være endelig og forskellig fra nul. I Overgangspunkterne mellem paa hinanden følgende simple Buer skal Tangent og Krumningsradius gaa kontinuert over fra den ene Bue til den anden. I disse Punkter kan Krumningsradius ogsaa blive nul eller uendelig, men vi forudsætter tillige udtrykkelig, at Krumningsradius kun maa være nul i en Spids og kun uendelig i et Infleksionspunkt.

Jeg har i tidligere Arbejder undersøgt de simple og lukkede plane Kurver op til fjerde Orden. Paa dette Sted vil jeg betragte de simple og lukkede Kurver, der af en Cirkel højest skæres i 4 Punkter, men ogsaa af mindst én Cirkel virkelig i 4 Punkter; de skal kaldes cykliske Kurver. Da en ret Linie sammen med den uendelig fjerne rette Linie er at opfatte som en Cirkel, maa en cyklisk Kurve være af 2den, 3die eller 4de Orden, og de her betragtede Kurver danner altsaa en Undergruppe af de tidligere.

En Undersøgelse af plane cykliske Kurver giver tillige Besked om de Rumkurver af fjerde Orden, der ligger paa en Kugle. Stereografisk Projektion af en saadan Rumkurve maa nemlig give en plan cyklisk Kurve, og omvendt. Forsaavidt de fundne Resultater er af projektiv Natur, faar man ad denne Vej noget at vide om Rumkurver af fjerde Orden beliggende paa en vilkaarlig konveks Keglesnitsflade. Dette giver et Supplement til mine tidligere Undersøgelser af visse Typer af Rumkurver af fjerde Orden, thi disse laa alle paa Keglesnitsflader med retliniede Frembringere.

Er nu en plan-cyklisk Kurve af fjerde Orden, kan den ikke gaa i det uendelige, thi den uendelig fjerne rette Linie sammen med en passende valgt anden ret Linie vilde da skære Kurven i mindst 6 Punkter; derimod behøver en cyklisk Kurve af anden Orden ikke at ligge helt i det endelige. Vi kan altsaa begynde med:

(1) En cyklisk Kurve af fjerde Orden maa ligge helt i det endelige; er Kurven af tredie Orden, kan den kun have ét uendelig fjernt Punkt, men er den af anden Orden, kan den have ingen eller to (sammenfaldne eller adskilte) uendelig fjerne Punkter.

En cyklisk Kurve af anden Orden, der ligger helt i det endelige, skal kaldes en cyklisk Ellipse. Har Kurven uendelig fjerne Punkter, vil vi for Kortheds Skyld kalde den en cyklisk Hyperbel eller Parabel, eftersom de uendelig fjerne Punkter er adskilte eller sammenfaldne.

En cyklisk Kurve af tredie eller fjerde Orden kan have ét men ogsaa kun ét Dobbeltpunkt. Vi vil først betragte de Kurver, der hverken har Dobbeltpunkt eller noget uendelig fjernt Punkt.

Det første, vi vil søge at bestemme, er Kurvens Toppunkter d. v. s. de Punkter, hvor Krumningscirklerne har Røring af tredie Orden med Kurven. Disse Punkter har i flere Henseender særlig Interesse. Saaledes ved man fra bekendte infinitesimalgeometriske Undersøgelser, der bygger paa de samme Forudsætninger som de her benyttede, at de firpunktsrørende Cirkler giver Maxima og Minima af Krumningsradierne. Ligeledes véd man sammesteds fra, at disse Krumningscirklers Centrer vil være Spidser paa Kurvens Evolut.

For at bestemme Toppunkterne bemærkes, at Krumningscirklen i et Punkt R desuden skærer Kurven i ét og kun ét Punkt P; de søgte Punkter er de, hvor R og P falder sammen. For at kunne bestemme Antallet af Sammenfaldspunkter, maa vi først finde, hvormange Punkter R der svarer til et givet P. For at se det, er det simplest at invertere den givne Kurve γ med P som Inversionscentrum. Derved gaar γ, hvad enten den er af 2den, 3die eller 4de Orden, aabenbart over i en Kurve af 3die Orden. Udelukkes de ovenfor nævnte Tilfælde, har denne intet Dobbeltpunkt og derfor tre Vendetangenter. Man ser heraf, at der gennem hvert Punkt P af Kurven γ gaar 3 oskulerende Cirkler, der berører udenfor P, d. v. s. til hvert Punkt P svarer 3 Punkter R. For nu at kunne anvende det grafiske Korrespondanceprincip, maa man sikkre sig, at R og P løber i modsatte Retninger paa Kurven. Dette ses ved følgende Hjælpesætning:

Af to oskulerende Cirkler, hvis Centrer er forbundne ved en endelig Bue af Evoluten, der ikke indeholder nogen Spids, maa den ene ligge helt inden i den anden.

Differensen mellem de to Cirklers Radius er nemlig lig med den Bue af Evoluten, der ligger mellem Centrerne og ikke indeholder nogen Spids, men denne Bue er større end sin Korde d. v. s. end Cirklernes Centerlinie.

Lad nu γ_1 og γ_2 være to oskulerende Cirkler, af hvilke γ_1 omslutter γ_2. Idet ingen af disse er firpunktsrørende, vil Kurven γ i Røringspunkt R_1 eller R_2 med en af disse Cirkler gaa fra den ydre til den indre Side eller omvendt. Vi lader nu et Punkt M gennemløbe γ saaledes at det i R_1 udefra gaar ind i γ_1. Vi kan endvidere antage γ_1 og γ_2 valgte saa nær ved hinanden, at M ved at fortsætte sin Bevægelse paa γ i samme Retning naar R_2, inden det naar noget af de enkelte Skæringspunkter P_1 og P_2 mellem γ og henholdsvis γ_1 og γ_2. M maa nu ved denne Bevægelse naa P_2, inden det naar P_1, thi γ_2 ligger indeni γ_1. Paa γ følger altsaa Punkterne $R_1 R_2 P_2 P_1$ paa hinanden i denne Orden; da der til en lille Bue $R_1 R_2$ maa svare en lille Bue $P_1 P_2$, maa derfor R og P bevæge sig i modsatte Retninger paa γ.

Nu giver Korrespondanceprincippet:

(2) En cyklisk Kurve, der hverken har noget Dobbeltpunkt eller gaar i det uendelige, har altid 4 Toppunkter.

Toppunkterne kan ogsaa bestemmes paa en anden Maade som Sammenfaldspunkter, nemlig mellem Røringspunkterne for en dobbelt berørende Cirkel til Kurven. Lad en Cirkel berøre denne i M og skære den i N_1; Cirklen vil da skære endnu en Gang i et Punkt N_2. Holdes M fast, medens N_1 varierer, vil ogsaa N_2 variere, og det er let at se f. Eks. ved Inversion med Hensyn til M, at N_1 og N_2 bevæger sig i modsatte Retninger. Der findes altsaa to Sammenfald. Af disse vil det ene falde i et uendelig fjernt Punkt, naar Kurven berører den uendelig fjerne Linie — den cykliske Parabel. Da de to Sammenfaldspunkter N, der svarer til samme M, aldrig kan falde sammen, fordi Kurven er cyklisk, har man altsaa:

(3) Til enhver cyklisk Kurve findes to adskilte Systemer af dobbeltrørende Cirkler, undtagen ved den cykliske Parabel, hvor der kun findes ét System.

Den sidste Del af Sætningen følger af, at Parabelen berører den uendelig fjerne Linie.

Toppunkterne bestemmes ved Sammenfald mellem et Punkt M og et tilsvarende Punkt N. Vi vil nu ikke give et nyt independent Bevis for (2), men gaa ud fra, at der findes mindst ét Toppunkt A, og ved Hjælp deraf udlede, at M og N maa bevæge sig i modsatte Retninger paa Kurven, saafremt denne ligger helt i det endelige. Lad M være valgt i Nærheden af A, og lad os lægge en Cirkel, der berører Kurven i M og desuden gaar gennem A. Det resterende Skæringspunkt A_2 mellem Kurven og Cirklen maa da ligeledes ligge i Nærheden af A; lad os sige, at M og N begge ligger i et vist Omraade ω af Kurven omgivende A. Punkterne M og A_2 maa nu i ω ligge paa modsatte Sider af A.

Dette kan atter ses ved at invertere om A. Derved gaar nemlig Kurven over i en Kurve af tredie Orden γ^3, der har et uendelig fjernt Infleksionspunkt A^1, medens Cirklen gaar over i en Tangent t, der berører γ^3 i et Punkt M^1, der ligger i Nærheden af A^1. M^1 og det enkelte Skæringspunkt A_2^1 mellem t og γ^3 maa da ligge paa modsatte Sider af A^1 i et vist Omraade af γ^3 omgivende A^1. Inverterer man nu tilbage, ses Paastandens Rigtighed. Lad nu atter N_1 og N_2 være de to Skæringspunkter mellem Kurven γ og en Cirkel, der berører denne i M. Naar N_1 bevæger sig i ω fra A mod A_2, maa N_2 efter det tidligere bevæge sig ud fra A_2 i den modsatte Retning; Sammenfaldspunktet N mellem N_1 og N_2 maa altsaa ligge paa ω mellem A og A_2; M og N vil derfor i ω ligge paa modsatte Sider af A. Men flytter nu M sig, maa ogsaa N flytte sig, og naar M bevarer sin Bevægelsesretning, maa det samme være Tilfældet med N, hvilket følger af Afhængighedens gensidige Entydighed; de skal endvidere falde sammen i A; deraf følger, at M og N bevæger sig i modsatte Retninger. Det er herved bevist, at to saadanne sammenhørende Punkter M og N, der kan falde sammen i et Toppunkt, bevæger sig i modsatte Retninger. Men ligger Kurven helt i det endelige, kan de to Punkter N, der svarer til samme Punkt M, ikke falde sammen; derfor maa disse Punkter, hvoraf hvert maa beholde sin Omløbsretning uforandret, naar M gør det, begge bevæge sig i modsat Retning af M. Man har altsaa:

(4) De to Røringspunkter mellem Kurven og en dobbeltrørende Cirkel i et af Systemerne bevæger sig begge i modsatte Retninger paa Kurven, naar denne ligger helt i det endelige.

Vi vil nu opstille en Sætning, der alene gælder cykliske Ovaler, idet vi vil bestemme en saadan Kurves Dobbeltnormaler. Lad en Linie n være Normal til Ovalen i to Punkter M og P. Tangenterne i disse Punkter er da parallele. Vi betragter derfor den Korrelation (MQ), hvor Tangenterne i tilsvarende Punkter er parallele. Den er aabenbart (1—1)-tydig, og tilsvarende Punkter vil gaa samme Vej. Men en Cirkel over MP som Diameter vil være en dobbeltrørende Cirkel, hvis Røringspunkter er M og P. Vi betragter derfor også Korrelationen (MN), mellem Røringspunkterne for dobbeltrørende Cirkler. Den er efter det foregaaende (2—2)-tydig saaledes, at tilsvarende Punkter løber modsat Vej. Korrelationen (QN) er derfor ogsaa (2—2)-tydig saaledes, at tilsvarende Punkter løber modsat Vej. Der vil derfor findes 4 Sammenfaldspunkter svarende til 2 Dobbeltnormaler:

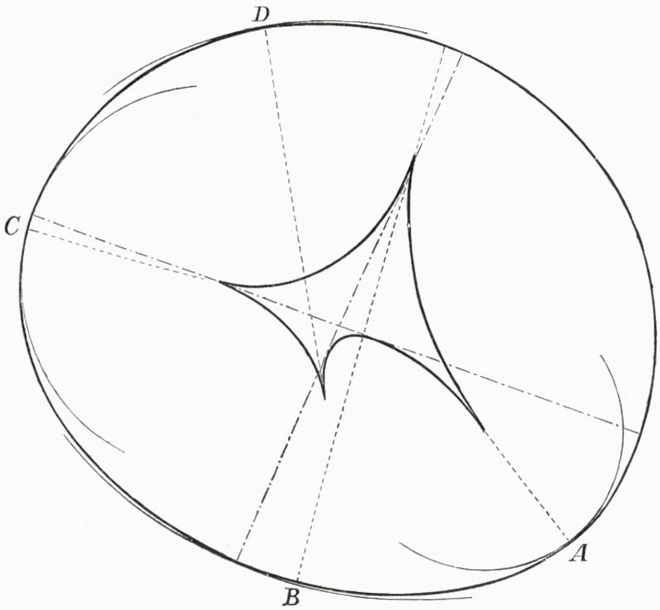

Fig. 1.

(5) En cyklisk Ellipse har to Dobbeltnormaler.

Ved den algebraiske Ellipse gaar Dobbeltnormalerne gennem Toppunkterne, men det er naturligvis i Almindelighed ikke Tilfældet.

Vi vil nu atter betragte en cyklisk Kurve af 2den eller 4de Orden, der hverken har Dobbeltpunkter eller gaar i det uendelige. Lad to Toppunkter, der paa Kurven følger paa hinanden, være A_1 og A_2. Glider et Punkt langs Kurven fra A_1 til A_2 uden at overskride de andre Toppunkter, vil de tilhørende Krumningscirkler ifølge Hjælpesætningen Side 4 ikke kunne have noget Punkt fælles. Der vil derfor af de Krumningscirkler, der svarer til Punkter af Buen $A_1 A_2$, højest kunne gaa én gennem hvert Punkt af Planen. Da der nu er 4 Buer begrænsede af Toppunkter, har man, idet man let ser, at det ikke gør noget, om der paa Buen findes Infleksionspunkter:

(6) Gennem et vilkaarligt Punkt af Planen gaar højest 4 oskulerende Cirkler til Kurven.

Lader vi det vilkaarlige Punkt rykke uendelig fjernt — eller erindrer vi, at den inverse Kurve til en cyklisk Kurve atter maa være cyklisk — faas heraf:

(7) En cyklisk Kurve af fjerde Orden, der ikke gaar i det uendelige og ikke har Dobbeltpunkter, har højest fire Infleksionspunkter.

Da en Kurve af fjerde Orden altid maa have et lige Antal Infleksionspunkter, og en Kurve uden Infleksionspunkter under de her forudsatte Betingelser er af 2den Orden, ser man at Kurven maa have enten 4 eller 2 Infleksionspunkter. Da disse Infleksionspunkter maa ordne sig i Infleksionspar, følger heraf:

(8) En cyklisk Kurve af 4de Orden, der ikke gaar i det uendelige og ikke har Dobbeltpunkter, har enten 2 eller 1 Dobbelttangent.

Vi vil nu tage Hensyn til de ovenfor udelukkede Tilfælde, nemlig at Kurven gaar i det uendelige eller — naar Talen er om Kurver af tredie eller fjerde Orden — at disse kan have et Dobbeltpunkt.

Lad os først betragte en cyklisk Hyperbel. Ved Inversion om et Punkt P af selve Kurven faar man en Kurve af 3die Orden med et Dobbeltpunkt, og denne har én Vendetangent. Forbindelsen mellem et Kurvepunkt R og det enkelte Punkt P, hvori Krumningscirklen i R paany skærer Kurven, vil altsaa her være (1—1)-tydig. Da man endvidere ligesom i Beviset for (2) ser, at R og P maa bevæge sig i modsatte Retninger, findes her almindeligvis 2 Toppunkter. Ifald Kurven specielt berører den uendelig fjerne rette Linie, maa dog et af Sammenfaldspunkterne mellem R og P falde i det uendelig fjerne Røringspunkt, thi den dobbelt-regnede uendelig fjerne rette Linie er en speciel Cirkel. Man har altsaa:

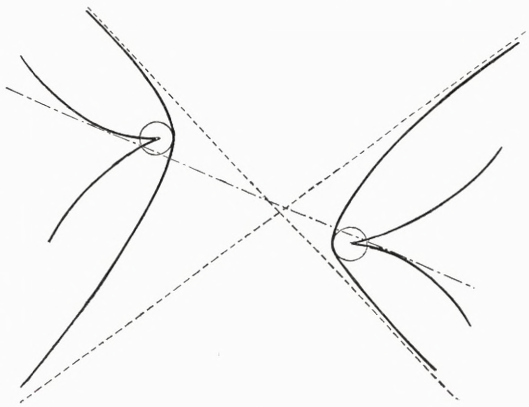

Fig. 2.

(9) En cyklisk Kurve af anden Orden, der gaar i det uendelige, har to Toppunkter, naar Kurven er en Hyperbel, men kun ét, naar den er en Parabel.

Ved Bestemmelsen af Dobbeltnormaler maa vi erindre, at der til en Kurve af anden Orden med to uendelig fjerne Punkter ikke gaar Tangenter i enhver Retning. Ved de to uendelig fjærne Punkter U_1 og U_2 deles Kurven i to adskilte Buer σ_1 og σ_2. Lad M være et Punkt af σ_1. Den Cirkel med uendelig stor Radius, der berører Kurven i M, vil yderligere skære den i U_1 og U_2; deraf følger, at de to Punkter N_1 og N_2, hvori en Cirkel, der berører i M, anden Gang kan berøre Kurven, maa ligge paa hver sin af de to Buer $\sigma_1$og σ_2; lad N_1 ligge paa σ_1, N_2 paa σ_2.

Naar M gennemløber Buen σ_1, vil N_2 gennemløbe hele σ_2, og naar M falder i U_1, maa N_2 falde i U_2. En Cirkel, der skal skære Kurven to Gange i to sammenfaldende Punkter, hvoraf det ene er uendelig fjernt, maa nemlig være selve den uendelig fjerne rette Linie regnet dobbelt. Naar M altsaa gennemløber σ_1 fra U_1 til U_2, maa N_2 gennemløbe σ_2 fra U_2 til U_1. Men er Tangenterne i M og Q parallele, og gennemløber M Buen σ_1 fra U_1 til U_2, vil Q aabenbart gennemløbe σ_2 fra U_1 til U_2. Forbindelsen mellem Q og N_2 er gensidig éntydig; der finder derfor kun ét Sammenfald Sted ɔ:

(10) En cyklisk Hyperbel har én Dobbeltnormal (se Fig. 2).

En Kurve med en parabolsk Gren kan ikke have nogen Dobbeltnormal.

Inverterer man en cyklisk Kurve af tredie Orden uden Dobbeltpunkter om et Punkt, der ikke ligger paa Kurven, faar man en Kurve af fjerde Orden uden Dobbeltpunkter. Da nu ved Inversion et Toppunkt maa gaa over i et Toppunkt har man:

(11) En cyklisk Kurve af tredie Orden uden Dobbeltpunkt har 4 Toppunkter.

Har man en Kurve af 3die eller 4de Orden med Dobbeltpunkt, faar man ved Inversion om dette Punkt en Kurve af anden Orden med to uendelig fjerne Punkter. Heraf udleder man ved (10):

(12) En cyklisk Kurve af 3die eller 4de Orden med ét Dobbeltpunkt har 2 Toppunkter.

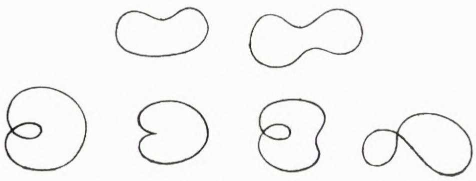

Fig. 3—8.

Som i Beviset for (6) ser man, at der gennem et vilkaarligt Punkt i Planen gaar 2 oskulerende Cirkler. Lader man Punktet være uendelig fjernt, følger heraf:

(13) En cyklisk Kurve af 4de Orden med et Dobbeltpunkt har intet eller to Infleksionspunkter.

For Kurven af 3die Orden findes kun det ene Infleksionspunkt som altid.

Af (12) og (13) i Forbindelse med den almindelige Teori for Kurver af fjerde Orden følger:

(14) En cyklisk Kurve af fjerde Orden med ét Dobbeltpunkt har 1 eller 2 Dobbelttangenter.

Ved det ovenstaaende i Forbindelse med min tidligere Opregning af samtlige Former for Kurver af fjerde Orden er Formen af samtlige cykliske Kurver af fjerde Orden bestemt. De findes i Fig. 3—8.

Vi vil nu atter holde os til en cyklisk Ellipse og undersøge dens Evolut (sé Fig. 1 og Fig. 2). For at kunne gøre dette, maa vi ganske vist forøge vore Forudsætninger, idet vi ogsaa om Evoluten forudsætter, at den er en simpel Kurve. Dette er æquivalent med en Forudsætning om, at ogsaa 3die og 4de Differentialkvotient for den givne Kurve afdelingsvis — i et endeligt Antal Intervaller — har Værdier der er endelige og bestemte.

Særlig vil vi søge at bestemme Evolutens Orden. Det er nemmere til en Begyndelse at udvide Spørgsmaalet lidt ved at søge det højeste Antal af Krumningscirkler, der kan skære en vilkaarlig given Cirkel $\varkappa$ under ret Vinkel. Vi bemærker nu først, at der i Kurvens Plan altid findes Punkter, hvorigennem der ikke gaar nogen Krumningscirkel. Alle Krumningsradierne er nemlig efter vore Forudsætninger endelige, og ifølge (2) findes der 4 extreme Værdier af dem. De to af disse maa svare til Maksimum, to andre til Minimum, og Maksimum og Minimum maa følge paa hinanden, naar vi gennemløber Kurven i en bestemt Retning. Hver af Maksimumscirklerne omslutter begge Minimumscirklerne, thi de sidstnævnte maa ligge inden i Ellipsen, medens de førstnævnte maa omslutte den. Gennem et Punkt, der ligger udenfor begge Maksimumscirklerne, gaar altsaa ingen Krumningscirkel. Lad P være et saadant Punkt. Vi danner et Cirkelbundt, der indeholder $\varkappa$ og en Nulcirkel, hvis Centrum er P, og betragter den Samling af paa hinanden følgende Cirkler μ i Bundtet, der begynder med Nulcirklen (P) og ender med $\varkappa$. Cirkler, der ligger tilstrækkelig nær ved (P), skærer ikke nogen Krumningscirkel. Det kommer nu an paa at se, i hvilke Overgangsstillinger der kan ske Ændring i Antallet af de Krumningscirkler, der skærer μ under ret Vinkel. Disse Overgangsstillinger maa være saadanne, hvor μ skærer to konsekutive Krumningscirkler orthogonalt. Dette vil for det første ske, naar μ skærer en af de hyperoskulerende Cirkler orthogonalt, thi i en saadan falder to konsekutive Krumningscirkler sammen. Naar μ skal skære to andre konsekutive Krumningscirkler orthogonalt, maa dens Centrum ligge paa disses Radikalakse; men en saadan er Tangent til Ellipsen, og μ maa tillige gaa gennem Røringspunktet. De søgte Overgangsstillinger af den sidstnævnte Art er altsaa de Cirkler i Bundtet, der skærer den givne cykliske Ellipse orthogonalt. Det samme kan ogsaa ses ved følgende H j æ l p e s æ t n i n g, der ogsaa kan være nyttig ved andre Undersøgelser over algebraiske Kurvers Evoluter:

E r e n p l a n K u r v e s t e r e o g r a f i s k P r o j e k t i o n a f e n s f æ r i s k K u r v e, v i l d e n p l a n e K u r v e s E v o l u t v æ r e P r o j e k t i o n e n f r a s a m m e Ø j e p u n k t a f d e n s f æ r i s k e K u r v e s r e c i p r o k k e P o l a r f i g u r m e d H e n s y n t i l K u g l e n.

Dette Lemma er saa at sige selvfølgeligt, naar man erindrer den velkendte Bestemmelse af Centret for den stereografiske Projektion af en paa Billedkuglen liggende Cirkel.

De ovennævnte Paastande om Skiftet i Antallet af orthogonalt skærende Krumningscirkler ses nu at følge deraf, at Antallet af Oskulationsplaner til en Rumkurve gaaende gennem et Punkt P forandres med 2 derved (og for en R^4 kun derved), at Punktet overskrider enten en stationær Oskulationsplan eller Kurvens Tangentflade.

Af den første Art Overgange findes højest fire, da Kurven har 4 hyperoskulerende Cirkler.

Af den anden Art kan vi vise at der højest findes to. Inverterer man nemlig den givne Kurve med P som Inversionscentrum, maa den gaa over i en ny cyklisk Ellipse, da den inverterede Kurve ligger helt i det endelige og hverken har Dobbeltpunkter, Vendepunkter eller Spidser. Systemet af Cirklerne μ gaar over i et System af koncentriske Cirkler, hvis fælles Centrum Q_1 er det inverse Punkt til Centret for den anden Nulcirkel i Bundtet. Men en Cirkel med givet Centrum Q_1 kan kun skære den inverterede Oval orthogonalt i Røringspunktet for en fra Q_1 udgaaende Tangent; af saadanne Tangenter findes højest to.

Nu begynder μ i Nærheden af (P) med ikke at skære nogen Krumningscirkel, og er dens Radius bleven tilstrækkelig stor, vil den ende med det samme. Da der nu ved Cirklens Variation i hele Bundtet højest kan ske 6 Overgange, vil der ved Variationen af μ fra (P) til $\varkappa$ højest tre Gange kunne være vundet to orthogonalt skærende Krumningscirkler, d. v. s. der findes højest 6 Krumningscirkler til Kurven, der skærer en given Cirkel orthogonalt. Dette gælder, hvor stor end den givne Cirkels Radius er — selve Methoden kan ogsaa bruges, naar man lader $\varkappa$ være en ret Linie — og man ser herved, at der højest findes 6 oskulerende Cirkler, hvis Centrer ligger paa en given ret Linie. Ovalens Evolut er altsaa højest af 6te Orden. Men da Evoluten ligger helt i det endelige, maa den være af lige Orden, og da den har 4 Spidser svarende til Centerne for de hyperoskulerende Cirkler, kan den hverken være af anden eller fjerde Orden, thi en Kurve af fjerde Orden kan højest have 3 Spidser. Vi har altsaa bevist:

(15) Evoluten til en cyklisk Ellipse er i alle Tilfælde af 6te Orden.

Vi vil dernæst søge at bestemme Evolutens Klasse og bemærker først, at der gennem et vilkaarligt Punkt P i Planen maa gaa mindst to Tangenter til Evoluten eller Normaler til den cykliske Ellipse. Dette er en Følge af, at der sikkert maa findes baade et Maksimum og et Minimum af Afstande fra P til Kurvens Punkter, da Kurven ligger helt i det endelige. Heraf sluttes, at man sikkert kan bestemme en ret Linie, der gaar gennem P og højest skærer Evoluten i 4 Punkter; en saadan vil man i hvert Fald kunne bestemme som en Linie, der er nærliggende til en gennem P gaaende Tangent til Evoluten. Lad nu M være et Punkt, der gennemløber en saadan ret Linie m ud fra dennes uendelig fjerne Punkt. Til at begynde med gaar der da to og kun to Tangenter gennem M, da der i hver Retning gaar to Tangenter til Ellipsen. Efter at hele Linien er gennemløbet, vil der atter gaa to og kun to Tangenter gennem M. Da Evoluten ikke har Vendetangenter, kan der ved M's Bevægelse kun være sket Ændring i Antallet af Tangenter gaaende gennem M derved, at dette Punkt har overskredet Evoluten, men da man skal ende og begynde med det samme Antal af Tangenter gennem M, kan der kun to Gange være vundet to Tangenter. Gennem intet Punkt af Planen vil der altsaa kunne gaa flere end $2 + 2 \cdot 2 = 6$ Tangenter. Da Evoluten ikke kan være af anden Klasse, har man altsaa:

(16) Evoluten til en cyklisk Oval er enten af 4de eller af 6te Klasse.

Vi maa dog sikkre os, at begge Muligheder eksisterer; at den første kan findes, ved man allerede fra den algebraiske Ellipse. Men man har i Almindelighed:

(17) Enhver i det endelige liggende Kurve af anden Orden (med endelige Krumningsradier), hvis Evolut er af 4de Klasse, maa være cyklisk.

Lad nemlig P være et Punkt, der ikke ligger paa Kurven, og lad det være Centrum for en Cirkel i Kurvens Plan. Betragter vi nu alle de Cirkler, der har P til Centrum, og lader Radien vokse fra en uendelig lille til en uendelig stor Længde, vil den begynde med ikke at have noget Punkt fælles med Kurven. Da der nu kun kan ske Ændring i Antallet af Skæringspunkter mellem Kurven og en af Cirklerne derved, at Cirklen berører Kurven, og der efter Forudsætningen gennem P højest gaar 4 Normaler til denne, vil Cirklen højest skære i 4 Punkter. Man ser let, at dette ogsaa gælder, naar Cirklens Centrum falder paa selve Kurven.

En Kurve af fjerde Orden, der skal kunne være Evolut til en cyklisk Oval, er let at karakterisere (se Fig. 1). Den skal have 4 Spidser, og fra hvert Punkt i Planen skal der til den gaa to Tangenter. Deraf følger straks, at den ikke kan have noget Dobbeltpunkt, thi i Nærheden af et saadant Punkt vilde man kunne finde Punkter, hvorfra der ikke udgik nogen Tangent. I Henhold til min tidligere Klassification af alle Former af Kurver af 4de Klasse kan den ikke have anden Form end den, der er givet for Evoluten i Fig. 1.

Enhver lukket Kurve uden Spidser, hvis Evolut har denne Form, vil være en cyklisk Oval. Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Evolventen til en saadan Kurve lukker sig, er, som man let ser:

$$\smile AB + \smile CD = \smile AC + \smile BD,$$

hvor A, B, C, D er de paa hinanden følgende Spidser paa Kurven.

Er denne Betingelse opfyldt, har man i Evolventen til Kurven — forsaavidt da intetsteds Krumningsradius til denne bliver nul — en i det endelige liggende cyklisk Kurve uden Spidser, Vendepunkter og Dobbelttangenter, men en saadan maa være en Oval.

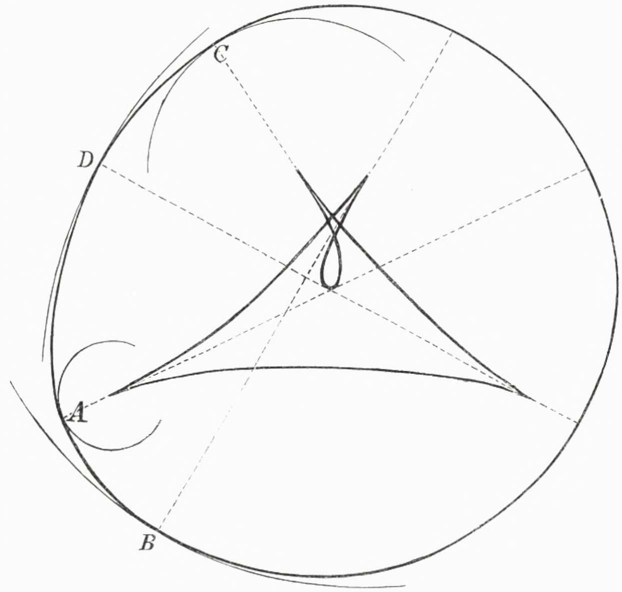

Fig. 9.

Som Eksempel kan nævnes, at enhver ydre Parallelkurve til en Ellipse er en cyklisk Oval. Endvidere ser man, at enhver af 4 Cirkelbuer sammensat Oval, da højest en af Buerne kan være større end en Halvcirkel, vil skæres i højest 4 Punkter af enhver Cirkel, der ikke indeholder en af de sammensættende Buer. Ovenstaaende indeholder tillige et Bevis for Eksistensen af ikke analytiske cykliske Ovaler.

Naar Evoluten til en Oval er af 6te Orden, af 6te Klasse, maa den ogsaa have 4 Spidser og 2 Dobbelttangenter. Men man kan endnu sige noget mere til Karakterisering af denne Kurve. Ved Evoluten er bestemt et endeligt Omraade ω, der er begrænset af Buer af Evoluten. Alle disse Buer maa vende deres konkave Side udad. Fra ethvert Punkt i Planen skal nemlig gaa mindst 2 Tangenter til Kurven, og fra et uendelig fjernt Punkt netop 2; hvis nu en Begrænsningsbue af ω vendte sin konvekse Side udad, vilde der fra et Punkt indeni ω men nær ved denne Bue ikke gaa nogen Tangent til Kurven. Kurven maa endvidere nødvendigvis have et Dobbeltpunkt, thi ellers vilde hele Evoluten høre med til Begrænsningen af ω, og fra hvert Kurvepunkt altsaa udgaa 2 og kun 2 Tangenter, der berørte udenfor Punktet; Klassen blev da 4. Af eventuelle Dobbeltpunkter kan kun ét høre til en Sløjfe, thi en Tangent, der ruller over hele Kurven, maa derved kun have drejet sig 360°.

Med disse Betingelser viser Prøve, at Evolutens Form maa være den, der er angivet i Fig. (9), men det maa udtrykkelig bemærkes, at Beskrivelsen er ufuldstændig og f. Eks. ikke kan maale sig med de Beskrivelser, jeg tidligere har givet af Formerne af Fjerdegradskurver. Betingelsen for, at en Evolvent til en saadan Kurve lukker sig, er, idet A, B, C, D er Kurvens Spidser i den Orden, hvori de følger paa hinanden paa Kurven:

$$\smile AB + \smile CD = \smile AC + \smile DA.$$

Er denne Betingelse opfyldt, ser man, som før, at en Evolvent til Kurven i Fig. (9), der ikke naar ind til denne Kurve, vil være en Oval.

Det kan endnu bemærkes, at to cykliske Ellipser γ_1 og γ_2 kan lægges saaledes i en Plan, at de tilsammen danner en cyklisk Kurve af 4de Orden. For at vise Muligheden heraf bemærkes, at en Cirkel, fra hvis Centrum der kun udgaar to Normaler til en Oval, ikke kan skære denne i flere end to Punkter. Dette bevises aldeles som den ovenstaaende Sætning (17). En tilstrækkelig Betingelse for, at en Cirkel, der skærer γ_1 i to Punkter, ikke kan skære γ_2 i flere end to Punkter, er altsaa den, at en Linie, der staar vinkelret paa Midten af et Liniestykke, der forbinder et Punkt inden i γ_1 med et Punkt inden i γ_2 ikke indeholder noget Punkt, hvorfra der udgaar flere end to Normaler til nogen af Ovalerne d. v. s. at en saadan Linie ikke gaar ind i de ovennævnte Omraader ω_1 og ω_2 svarende til de to Ovaler. Da ω_1 og ω_2 er fast knyttede til γ_1 og γ_2, kan dette aabenbart naas ved at fjerne disse tilstrækkelig langt fra hinanden. Ved Inversion kan heraf udledes mere almindelige cykliske Kurver sammensatte af to Grene, hvis ikke-analytiske Eksistens herved bliver godtgjort.

Vi vil nu betragte en cyklisk Hyperbel (se Fig. 2). Her findes kun to hyperoskulerende Cirkler, og disse maa være numeriske Minima; de maa derfor ligge helt indeni hver sin af de to Pseudogrene, hvori Kurven deles af de to uendelig fjerne Punkter. Gennem et Punkt indenfor en af Minimumscirklerne gaar der ifølge Hjælpesætningen S. 4 ingen oskulerende Cirkel. For nu ogsaa her at bestemme Antallet af de Krumningscirkler, der skærer en given Cirkel $\varkappa$ orthogonalt, danner vi paa lignende Maade som før Side 9 et Bundt af Cirkler bestemt ved $\varkappa$ og en Nulcirkel, hvis Centrum er et Punkt P indenfor en af Minimumscirklerne. De Overgangsstillinger, i hvilke der kan ske Ændring i Antallet af orthogonalt skærende Krumningscirkler, er dels de Cirkler i Bundtet, der skærer de hyperoskulerende Cirkler orthogonalt — og af dem findes to — dels de Cirkler, der skærer Hyperblen orthogonalt. For at bestemme Antallet af de sidste, inverterer vi som før med P som Inversionscentrum og faar derved en Kurve af fjerde Orden med P til Dobbeltpunkt. Fra P udgaar ingen Tangent til denne Kurve, den har ingen andre Dobbeltpunkter og har ingen Infleksionspunkter. Men Formen af en saadan Kurve er fuldstændig bestemt efter min tidligere Klassifikation, og til den udgaar der fra et Punkt højest 4 Tangenter (se Fig. 5)*. Der findes altsaa i alt 6 Overgangsstillinger, og heraf udledes som ovenfor, at Evolutens Orden enten maa være 4 eller 6. Men den første Mulighed maa her udskydes ligesom ved den cykliske Ellipse. Man vil nemlig se, at i hvert Fald den uendelig fjerne rette Linie skærer i 6 Punkter, idet den vil være Spidstangent to Gange. Den uendelig fjerne rette Linie u kan nemlig ikke have flere Punkter fælles med Evoluten end de to U_1 og U_2, der er Krumningscentrer til Hyperblens uendelig fjerne Punkter. Disse Punkter U_1 og U_2 ligger i Retninger, der er vinkelrette paa Asymptoternes Retninger. Ved U_1 og U_2 deles u i to Dele; fra et Punkt af den ene Del udgaar to i det endelige liggende Tangenter til Evoluten, fra et Punkt af den anden Del udgaar ingen saadan Tangent. Da nu u maa berøre i U_1 og U_2, thi Normalen i et uendelig fjernt Punkt af Hyperblen er selv uendelig fjern, følger heraf, at U_1 og U_2 maa være Spidser med u til fælles Spidstangent (som ved en algebraisk Hyperbel).

Det samme kan ogsaa ses ved den Side 9 nævnte Hjælpesætning, da Billedet af en Rumkurve faar en Spids, naar Øjepunktet ligger paa en Tangent til Kurven. At U_1 og U_2 ligger uendelig fjernt i Retninger, der er vinkelrette paa Asymptoternes Retninger, følger efter denne Metode deraf, at konjugerede Tangenter til en Kugle staar vinkelret paa hinanden.

Vi har altsaa vist:

(18) Evoluten til enhver cyklisk Hyperbel er af Ordenen 6.

Af denne Sætning udleder man ligesom ved Ellipsen, at Klassen maa være 4 eller 6. Men her kan man i Modsætning til Forholdene ved den cykliske Ellipse vise, at Klassen maa være 4 i alle Tilfælde. Lad os lægge Figuren saaledes, at man kan sige, at den ene Pseudogren af Hyperblen ligger tilhøjre, den anden tilvenstre; dette kan f. Eks. ske ved, at vi lægger den Halveringslinie x af Asymptotevinklen, der skærer Hyperblen, i en vandret Stilling. Minimumscirklerne ligger helt indeni hver sin Gren, og man kan derfor utvetydig sige, at Spidsen A for Evoluten til den højre Pseudogren vender tilvenstre, og at den anden Spids B vender tilhøjre. Efter vort Valg af Betegnelser vil retvinklet Projektion af BA paa x gaa tilhøjre. De uendelig fjerne Punkter af Evoluten ligger nu i Retninger, der er vinkelrette paa Asymptoternes Retninger. Lad os projicere BA i disse Retninger ind paa x. Da de to Retninger er symmetriske med Hensyn til x, vil Projektionen af BA for mindst én af disse Retninger gaa tilhøjre. Lad U_1 angive en Retning, hvor dette sikkert finder Sted.

Gennem U_1 kan ikke gaa andre Tangenter end u, thi til en Hyperbel gaar ikke andre Tangenter i Asymptotens Retning end selve Asymptoten. Drejer man nu en ret Linie m om U_1, idet den har u til Begyndelsesstilling, vil den til at begynde med kun skære Evoluten i to Punkter, det ene i Nærheden af U_1, det andet i

* Se. Om Ikke-analytiske Kurver, Kgl. D. Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og Math. Afd. I. 6, S. 304 (16).

Nærheden af U_2. En Ændring i Antallet af Skæringspunkter mellem m og Kurven kan, da der fra U_1 ikke udgaar nogen Tangent, kun ske derved, at m overskrider en Forbindelseslinie mellem U_1 og en af Kurvens to Spidser. Men betragter man nu Figuren, og lader Linien bevæge sig parallelt med sig selv stadig tilvenstre, vil den først træffe den Spids A, der hører til den højre Pseudogren, og den Spids vender tilvenstre; der vil derfor tabes to Skæringspunkter derved, at m overskrider Stillingen $U_1 A$; disse vil vindes igen, naar m overskrider Forbindelseslinien mellem U_1 og den anden Spids. Enhver gennem U_1 gaaende Linie skærer altsaa Kurven i højest 2 Punkter foruden i selve U_1.

Lad nu P være et vilkaarligt Punkt i Planen, og lad os forbinde P med U_1 med en ret Linie m. Gennemløber et Punkt M Linien fra U_1 til P, vil der, naar M er nær ved U_1 (d. v. s. naar M endnu ikke har overskredet Evoluten) gennem M kun gaa 2 Tangenter til denne. Dette Antal kan ved M's Bevægelse højest vokse til 4, da man altid kan vælge en saadan Del PU_1 af m, at der paa den ligger intet eller højest ét Skæringspunkt med Evoluten. Man har altsaa her:

(19) E v o l u t e n t i l e n c y k l i s k H y p e r b e l e r a l t i d a f K l a s s e 4.

Vi vil til Slutning endnu betragte den simple cykliske Parabel. Dens Evolut kan kun have ét Punkt U fælles med den uendelig fjerne rette Linie u, nemlig Krumningscentret i Parablens uendelig fjerne Punkt. Tangenten i U er u, og vi kan vise, at u m a a v æ r e e n V e n d e t a n g e n t. Fra hvert fra U forskelligt Punkt af u udgaar nemlig én og kun én i det endelige liggende Tangent til Evoluten, fra U selv ingen saadan Tangent. Deraf følger, at u enten maa være en Vendetangent eller en sædvanlig Tangent. Men Evoluten, der altsaa har én og kun én Spids, maa være af ulige Klasse, og hvis u var en sædvanlig Tangent, vilde der fra et Punkt i Nærheden af u (men ikke i Nærheden af U) udgaa to Tangenter til Evoluten; dette viser, at u maa være en Vendetagent. Dette kan ogsaa udledes ved Hjælpesætningen Side 9; Projektionen af en Rumkurve vil nemlig, naar Projektionscentret P ligger i Røringspunktet for en stationær Oskulationsplan, faa et Infleksionspunkt i Sporet af Kurvens Tangent i P.

Vi begynder nu som før med at søge det højeste Antal af de Krumningscirkler, der kan skære en given Cirkel $\varkappa$ orthogonalt, og betragter i den Anledning et Cirkelbundt (μ) bestemt ved $\varkappa$ og en Nulcirkel, hvis Centrum ligger indeni Parablens hyperoskulerende Cirkel. Varierer μ ud fra Nulcirklen, vil Opgaven til at begynde med ikke have nogen Løsning. Stillinger af μ, hvor der vindes eller tabes to Løsninger, er saadanne, hvor μ skærer orthogonalt enten den hyperoskulerende Cirkel — hvilket giver 1 Mulighed — eller Parablen. For at finde Antallet af de sidstnævnte Cirkler inverteres Parablen med P som Inversionscentrum; derved faar man som bekendt efter Theorien for inverse Kurver en Kurve af fjerde Orden uden Vendetangenter og med en Spids, hvorigennem der ikke gaar nogen Tangent til Kurven. En saadan Kurve kan i Overensstemmelse med min tidligere Enumeration ikke være nogen anden end den, der er fremstillet i Fig. (6), og den er af 3die Klasse. Man faar altsaa i alt fire Overgangscirkler. Heraf udledes paa samme Maade som i de ovenstaaende Tilfælde, at en Cirkel $\varkappa$ højest kan skære

4 Krumningscirkler til Parablen orthogonalt. Lader man μ være en ret Linie, erindres om, at en i det endelige liggende ret Linie maa opfattes som Orthogonalcirkel til den uendelig fjerne rette Linie regnet dobbelt; dette ses ved Inversion at følge af, at en Cirkel er orthogonal til en Nulcirkel, hvis Centrum ligger paa den førstnævnte Cirkel. Men den uendelig fjerne rette Linie regnet dobbelt er en speciel Krumningscirkel til Parablen. En ret Linie kan altsaa højest have 3 Punkter fælles med Evoluten; denne, der er af 3die Orden og har en Spids, maa være af 3die Klasse ɔ:

(20) En almindelig cyklisk Parabels Evolut er af 3die Orden og 3die Klasse.

At der eksisterer ikke algebraiske cykliske Parabler og Hyperbler, følger af, at enhver lukket Kurve, hvis Evolut er bestemt som angivet ovenfor, maa være cyklisk. Dette bevises som Sætning (17).

Vi vil nu se, hvad der af det foregaaende kan udledes om Kurver af fjerde Orden beliggende paa en Kugle. Det forudsættes om disse Kurver, at deres Projektioner er simple Kurver i den S. 1 givne Forstand.

Ved stereografisk Projektion gaar Rumkurven over i en plan cyklisk Kurve. Da denne har 4 hyperoskulerende Cirkler, naar Kurven hverken har Dobbeltpunkter eller gaar i det uendelige, faar man:

(21) En sammenhængende Kurve af fjerde Orden uden Dobbeltpunkter beliggende paa en Kugle — eller en vilkaarlig konveks Keglesnitsflade — har 4 hyperoskulerende Planer. Har Kurven et Dobbeltpunkt, findes kun 2 saadanne.

Da der gennem et vilkaarligt Punkt i en cyklisk Kurves Plan højest gaar 4 Krumningscirkler og ifølge (8) og (14) højest to dobbeltrørende Cirkler, faar man:

(22) Til en sammenhængende Kurve af fjerde Orden uden Dobbeltpunkter beliggende paa en konveks Keglesnitsflade gaar gennem et vilkaarligt Punkt af selve Fladen højest 4 Oskulationsplaner og højest 2 Tangentplaner til den dobbelt omskrevne Developable.

Nøjere Bestemmelse af Klassen har jeg kun naaet ved de sfæriske Kurver, der er inverse til Kurver af anden Orden. Til denne Art hører enhver sfærisk Kurve af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt, thi fra dette vil Kurven projiceres ved en Kegleflade af anden Orden. Vi vil først finde det højeste Antal af Oskulationsplaner, der kan gaa gennem et Punkt P udenfor Kuglen. Lad Polarplanen til P skære Kuglen i en Cirkel $\varkappa$; de gennem P gaaende Oskulationsplaner vil da skære Kuglen i Cirkler, der er orthogonale til $\varkappa$. Da nu Vinkler overføres uforandrede ved stereografisk Afbildning, kan man af det tidligere (se Beviset for 15)) udlede, at der gennem P gaar højest 6 Oskulationsplaner; tillige har vi i det foregaaende vist, at dette højeste Antal kan naas for mindst ét Punkt P.

Vi mangler blot endnu at tage Hensyn til Punkter indenfor Kuglefladen. Ændring i Antallet af Oskulationsplaner gaaende gennem et Punkt P kan nu, idet P bevæger sig kontinuert f. Eks. langs en ret Linie, kun ske ved, at P enten overskrider Kurvens Tangentflade eller overskrider en af Kurvens hyperoskulerende

Planer. Men Tangenterne kan ikke gaa ind i Kuglen, saa vi behøver kun at tage Hensyn til den sidstnævnte Mulighed. Men de to hyperoskulerende Cirkler til den cykliske Hyperbel, hvori Rumkurven projiceres stereografisk fra Dobbeltpunktet, ligger udenfor hinanden. De dertil svarende Hyperoskulationsplaner maa derfor have en Skæringslinie, der ligger udenfor Kuglen. Forbindes nu P med et Punkt Q af denne Linie med en ret Linie, vil man langs denne kunne naa til Kuglens Overflade uden at skære nogen Oskulationsplan. Fra et vilkaarligt Punkt indeni Kuglen kan der altsaa højest udgaa to oskulerende Planer. Vi har altsaa bevist:

(23) En Kurve af fjerde Orden, som ligger paa en konveks Keglesnitsflade og har et Dobbeltpunkt, maa være af Klassen 6.

Samme Resultat kan man faa, naar Kurven kan projiceres stereografisk i en cyklisk Ellipse. Her findes 4 hyperoskulerende Planer, men man kan i Henhold til ovenstaaende altid finde to af disse, hvis Skæringslinie s ligger udenfor Kuglen, og forbinder man P med Skæringspunktet Q mellem s og en af de øvrige Hyperoskulationsplaner, ser man, at der i dette Tilfælde ikke kan gaa flere end 4 Oskulationsplaner gennem et Punkt indeni Kuglen.

Projiceres Rumkurven stereografisk i en cyklisk Parabel, har den en Spids. Man kan da let ved de samme Slutninger som ovenfor udlede:

(24) En Kurve af fjerde Orden, som ligger paa en konveks Keglesnitsflade og har en Spids, maa være af fjerde Klasse.

Det vil ikke være til nogen Nytte at søge det højeste Antal af Dobbeltsekanter til en sfærisk Rumkurve af 4de Orden, der kan gaa gennem et givet Punkt. Man kan nemlig i et Eksempel vise, at dette Antal kan blive saa stort, det skal være. Lad os begynde med at konstruere en cyklisk Ellipse, der er symmetrisk om en lad os sige vandret Akse. Dennes Evolut er da ogsaa symmetrisk om samme Akse. Lad Punkter af denne, der ligger symmetrisk med Hensyn til Aksen, være $P_1 P_1^1, P_2 P_2^1 \dots P_n P_n^1$. Vi lader nu den øverste Del af Evoluten indeholdende Punkterne $P_1 \dots P_n$ uforandret, medens vi ændrer paa den nederste, dog saaledes, at Punkterne $P_1^1 P_2^1 \dots P_n^1$ samt Tangenterne i disse Punkter forbliver uforandrede. Men en Bue mellem to paa hinanden følgende Punkter P ændrer vi saaledes, at at den vedbliver at være en elementær Bue med de samme Endetangenter, og at dens Længde forbliver uforandret, og endelig saaledes, at hele Evoluten forbliver af fjerde Klasse. Dette er øjensynlig muligt; Evoluten er nu ikke længere selv symmetrisk om Aksen. En Oval-Evolvente til den ændrede Ellipseevolut maa nu i Henhold til det foregaaende atter være en cyklisk Ellipse, og den indeholder $2n$ Punkter $P_1 P_1^1, P_2 P_2^1 \dots P_n P_n^1$, der ligger parvis symmetrisk med Hensyn til en Akse, der dog ikke er en Symmetriakse for Kurven. Tager man nu en stereografisk Projektion af denne Oval fra et Punkt O ind paa en Kugle, faar man en Rumkurve af fjerde Orden. Planen gennem O og den ovennævnte Akse har med Hensyn til Kuglen en Pol S. Gennem dette Punkt gaar alle Forbindelseslinierne mellem de Par af Punkter, hvori $P_1 P_1^1, P_2 P_2^1 \dots P_n P_n^1$ projiceres, uden at S er Toppunktet for en Kegle af anden Orden indeholdende Kurven.

RÉSUME.

Par courbe simple je comprends une courbe fermée (dans le sens projectif) composée d'un nombre fini d'arcs élémentaires. Un arc élémentaire est un arc continue dont les tangentes et les rayons de courbure varient d'une manière continue le long de la courbe et qu'une droite arbitraire rencontre en deux points au plus. Nous supposerons en outre que les rayons de courbure (pour un point à une distance finie) ne sont infinis que pour les points d'inflexion et nuls que pour les points de rebroussement; ces points sont nécessairement des points communs à deux arcs consécutifs.

Mon but est d'étudier les courbes simples rencontrées par un cercle en quatre points au plus. Ces courbes, je les appelle cycliques.

Comme une droite quelconque jointe à la droite à l'infini est un cercle spécial, une courbe cyclique sera du quatrième, du troisième ou du deuxième ordre, c'est-à-dire qu'elle sera coupée par une droite arbitraire en 2, 3 au 4 points ou plus.

On voit aussitôt qu'une courbe cyclique peut avoir un point double au plus. Une courbe cyclique du quatrième ordre doit rester dans la partie finie du plan; une courbe du troisième ordre aura un seul point à l'infini, mais une courbe du deuxième ordre aura 0, 1 ou 2 points à l'infini. Suivant ces cas, nous appellerons une courbe cyclique simple du deuxième ordre, une ellipse, une parabole ou une hyperbole cyclique.

Cherchons maintenant les sommets d'une courbe cyclique, c'est-à-dire les points où la courbe est rencontrée par un cercle en quatre points confondus. On trouvera:

Chaque courbe simple cyclique sans points doubles et sans points à l'infini aura quatre sommets.

Pour le démontrer, on considère la correspondance (3—1) entre les points R de la courbe et les points P où la courbe est rencontrée de nouveau pas les cercles osculateurs en R[1]. Les $1+3=4$ points doubles de la correspondance donnent les quatre sommets.

Dans les cas exclus dans ce théorème on démontre d'une manière analogue que:

Une cyclique du troisième ordre sans points doubles aura quatre sommets.

[1] Ici et souvent dans ce qui suit je m'appuie sur le principe suivant: Si sur une courbe fermée on suppose entre deux points X et Y une correspondance (p, q) où deux points Y (ou X) correspondants au même points X (ou Y) ne peuvent jamais se confondre et si les deux sens de X et Y correspondants sont contraires, alors on aura $p+q$ points correspondants qui se confondent (points doubles).

Dans chaque cas il faut une discussion détaillée de la figure pour s'assurer que les conditions mentionnées sont remplies. Dans ce résumé succinct, nous avons supprimé cette discussion souvent pénible.

Une cyclique du troisième ou du quatrième ordre à un point double et de même une ellipse ou une hyperbole cyclique auront deux sommets, mais une parabole n'en aura qu'un.

Il est facile de voir que deux cercles osculateurs à la courbe en deux points réunis par un arc de la courbe ne contenant aucun sommet seront situés l'un dans l'intérieur de l'autre. Par conséquent, si A et B sont deux sommets consécutifs sur la courbe, on ne pourra faire passer par un point arbitraire du plan plus d'un des cercles osculateurs à cet arc.

On en déduit en supposant le point à l'infini:

Une courbe cyclique du quatrième ordre sans point double aura deux ou quatre points d'inflexions, mais si la courbe a un point double il y en aura deux ou aucun.

De la théorie générale des courbes simples du quatrième ordre on déduit:[1]

Une courbe cyclique du quatrième ordre aura un ou deux tangentes doubles.

Alors les formes des courbes cycliques du quatrième ordre sont celles des fig. 3—8.

En considérant les points variables M_1 et M_2 où la courbe est rencontrée par un cercle tangent à la courbe en un point fixe, on a entre M_1 et M_2 une correspondance (1, 1). On en deduit:

A chaque courbe cyclique appartiennent en général deux systèmes distincts de cercles doublement tangents à la courbe; seulement la parabole n'en a qu'un.

Dans ce qui suit nous nous bornerons aux courbes cycliques du deuxième ordre, principalement pour en étudier les développées. Il résulte de ce qui précède que la développée d'une ellipse cyclique aura quatre, d'une hyperbole deux et d'une parabole un point de rebroussement (correspondant au nombre de sommets).

Si un cercle est tangent en M et N à une ellipse cyclique et si les tangentes en M et P sont parallèles entre elles on aura entre N et P une correspondance (2, 2); on en déduit:

Une ellipse cyclique aura deux normales doubles.

Quant à l'hyperbole, une discussion un peu plus détaillée est nécessaire, mais la même méthode s'appliquera et on trouvera:

Une hyperbole cyclique aura une normale double; — une parabole n'en aura aucune.

Les normales doubles des courbes algébriques passent par les sommets, mais cela n'a pas lieu en général.

Pour trouver l'ordre de la développée, je commence par chercher le nombre des cercles osculateurs à la courbe qui coupent orthogonalement un cercle donné α. Si l'on fait varier un cercle μ dans un faisceau contenant α, le nombre cherché ne s'altérera que dans les cas où μ coupe orthogonalement soit le cercle osculateur en un sommet soit la courbe donnée. En s'appuyant sur cette remarque on trouve qu'il y a 6 cercles au plus qui coupent α orthogonalement. En supposant enfin α réduit à une droite on aura:

L'ordre de la développée d'une ellipse ou d'une hyperbole cycliques est 6; mais celui d'une parabole cyclique est 3.

Maintenant on est à même de chercher la classe de la développée et l'on trouve:

La développée d'une ellipse cyclique est de la quatrième ou de la sixième classe.

Il y a là une différence essentielle entre l'ellipse algébrique et l'ellipse cyclique, l'ordre de la développée de la première de ces courbes étant toujours 4.

Les deux formes possibles de la développée se trouvent aux fig. 1 et 9.

On peut encore démontrer:

Chaque courbe simple dont la développée est de la quatrième classe sera cyclique.

[1] Voir Det Kgl. danske Vidensk. Selsk. Skrifter 6, sér. X, 1: Indledning i Læren om grafiske Kurver.

Il est assez curieux de constater que la différence ci-dessus mentionnée ne se manifeste que pour les ellipses, car on a:

La développée d'une hyperbole cyclique est de la quatrième classe et la développée d'une parabole cyclique sera de la troisième classe.

Des théorèmes sur les courbes cycliques planes on déduit un moyen de projection stéréographique des théorèmes sur certaines courbes situées sur une sphère. On a p. ex:

Une courbe simple sphérique du quatrième ordre sans points doubles aura toujours quatre plans stationnaires.

Une courbe simple du quatrième ordre à un point double est de la classe 6 c'est-à-dire que par un point arbitraire de l'espace passent six plans osculateurs au plus.

Il va sans dire que dans ces théorèmes on peut substituer à la sphère une surface convexe algébrique du deuxième degré.